Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 316–321

Pasirinkimo sandorių įkainojimo modelių tyrimas

Mantas LANDAUSKAS, Eimutis VALAKEVIČIUS
Kauno technologijos tniversitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
el. paštas: mantas.landauskas@stud.ktu.lt; eimval@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje tiriami ir palyginami trys skaitiniai europietiško tipo pasirinkimo sandorių įkainojimo modeliai: binominis, Monte Karlo ir Markovo grandinių. Modeliams realizuoti buvo sukurta efektyvi programinė priemonė C++ programavimo kalba. Tyrimo metu nustatyti kiekvieno modelio privalumai bei trūkumai. Sandorio kaina, gauta pagal Black–Scholes modelį yra laikoma etalonine kaina, su kuria lyginamos skaitinių modelių kainos.

Raktiniai žodžiai: pasirinkimo sandoris, binominis modelis, Monte Karlo metodas, Markovo grandinės.

1. Įvadas

Pasirinkimo sandoris yra viena iš išvestinių finansinių priemonių, kurios vertė priklauso nuo kitų vertybinių popierių (VP), vadinamų bazinėmis finansinėmis priemonėmis. Sudėtingesni sandoriai gali būti išreiškiami pasirinkimo ir ateities sandoriais [3].

Bazinio finansinio aktyvo kaina kiekvienu laiko momentu yra atsitiktinė, todėl investuotojas, įsigydamas pasirinkimo sandorį, apsidraudžia nuo galimų finansinių nuostolių dėl nepalankaus akcijų kainų kitimo. Sandorio įvykdymo momentu jo turėtojui pareikalavus, sandorio leidėjas privalo parduoti sutartą prekę ar finansinį aktyvą už iš anksto sutartą kainą. Ši kaina vadinama sandorio įvykdymo (ceremonijos) kaina. Parduodamas pirkėjui kontraktą, pardavėjas gauna tam tikrą sumą (premiją). Šią sumą toliau vadinsime sandorio kaina.

Norint apskaičiuoti sandorio kainą reikia žinoti bazinio aktyvo (akcijos) kainų pasiskirstymą sandorio pabaigoje. Tam tikslui kuriami įvairūs akcijų kainų dinamikos modeliai. Binominis ir Markovo grandinių metodai pagrįsti multiplikatyviuoju modeliu, o Monte Karlo metodas remiasi Brauno judesio procesu. Visi modeliai sukurti su prielaida, kad akcijų kainų grąžos pasiskirstę pagal lognormalųjį dėsnį.

2. Pasirinkimo sandorių įkainojimo modeliai

Tarkime, kad akcijos kaina sandorio pabaigoje S_T, sandorio įvykdymo kaina X, sandorio trukmė T, nerizikingoji palūkanų norma r_f. Pasirinkimo pirkti sandorio kaina bendruoju atveju randama pagal formulę (1).

$$C = \frac{1}{(1+r_f)^T} \cdot E\left(\max\left(0, S_T - X\right)\right), \tag{1}$$

čia vidurkis skaičiuojamas naudojant rizikai neutralias (sintetines) tikimybes.

2.1. Binominis modelis

Pagal binominį modelį aktyvo kaina per kiekvieną periodą gali padidėti daugikliu u su tikimybe p arba sumažėti daugikliu d su tikimybe $1-p$. Kilimų skaičių pažymėję k, gauname, kad kainos išraiška po n periodų yra: $S_n = S_0 \cdot u^k d^{n-k}$.

Binominio modelio parametrai gaunami iš multiplikatyviojo modelio [4]. Naudosime tokius parametrų u ir d įverčius: $\hat{u} = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ir $\hat{d} = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Turėdami šiuos įverčius galime užpildyti kainų gardelę, rasti akcijos kainas po N periodų ir apskaičiuoti pasirinkimo sandorio vertę (gaunamas pajamas) jo pabaigoje. Sandorio vertę vienu periodu anksčiau randame ieškodami diskontuoto verčių C_u ir C_d vidurkio pagal formulę (2). Diskontuojame naudodami nerizikingosios palūkanų normos grąžą $R = 1 + r_f$, o vidurkiui skaičiuoti naudojame rizikai neutralią tikimybę q. Tokius skaičiavimus atliekame tol, kol apskaičiuojame dabartinę pasirinkimo sandorio vertę C.

$$C = \frac{1}{R}\left(qC_u + (1-q)\,C_d\right). \tag{2}$$

2.2. Monte Karlo modeliavimas

Monte Karlo metodas naudojamas tada, kai sprendinio nepavyksta gauti analiziniu būdu. Akcijos kainos kitimas yra Brauno judesys, o atsitiktinis lognormaliai pasiskirsčiusios akcijos kainos kitimas modeliuojamas pagal tokią formulę:

$$S(t + \triangle t) = S(t)\mathrm{e}^{(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\triangle t + \sigma\sqrt{\triangle t}Z}, \tag{3}$$

čia $Z \sim N(0,1)$, δ yra metinė nerizikingoji tolydžioji palūkanų norma, σ – akcijos grąžos kintamumas, $\triangle t$ – laiko intervalas, per kurį pakinta kaina. Kuo daugiau trajektorijų pagal šią formulę sugeneruosime, tuo tikslesnį kainos įvertį gausime. Pasirinkimo pirkti sandorio kaina apskaičiuojama pagal (4) formulę.

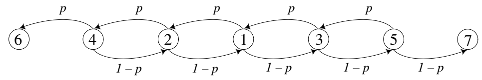
$$C = \mathrm{e}^{-N \cdot \triangle t \cdot \delta} E\left(\max(S_T - X, 0)\right). \tag{4}$$

2.3. Markovo modelis

Markovo modelis remiasi tuo pačiu pagrindinių aktyvų kainų kitimo dėsningumu kaip ir binominis modelis [1]. Jo tikslas sumažinti nagrinėjamų kainų būsenų skaičių.

Akcijų kainų kitimą galima aprašyti ir sugeriančia Markovo grandine. Kiekviena iš kainų gardelės viršūnių yra kuri nors Markovo grandinės būsena. Perėjimo tikimybė į būseną, atitinkančią aukštesnę kainą yra kainos kilimo tikimybė ir atvirkščiai. Visas būsenas sunumeruojame iš eilės imdami periodus ir pradėdami nuo didžiausią kainą turinčios tame periode būsenos. Numeruojamos tik skirtingos būsenos. Lygybė $ud = 1$ sumažina skirtingų gardelės būsenų skaičių nuo $\frac{N(N+1)}{2}$ iki $2N + 1$.

Aprašyta Markovo grandinė turi 2 sugeriančias būsenas (atitinkančias didžiausią arba mažiausią kainas). Šiuo atveju negalima apskaičiuoti stacionariųjų tikimybių, nes



1 pav. Grandinės būsenų grafas.

jos gaunamos tik tada, kai Markovo grandinė yra ergodinė. Markovo grandinė gardelei su 3 periodais pavaizduota 1 paveiksle.

Kainų būsenų tikimybėms po N žingsnių rasti naudojamės idėja, kad vienas Markovo grandinės žingsnis atitinka kainos pokyti per vieną periodą. Markovo grandinės perėjimo tikimybių matrica, kai gardelė turi 2 periodus yra tokia:

$$\pi\,(p)=\begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Tarkime, kad sandorio laikotarpis dalomas į N dalių, tada Markovo grandinė turės N galimų žingsnių. Todėl finalines tikimybes randame (5) matricą keldami laipsniu, lygiu sandorio periodų skaičiui.

Suskaičiavę būsenų tikimybes, dauginame jas iš atitinkamos sandorio vertės jo pabaigoje, susumuojame ir diskontuojame į sandorio pradžią. Gautoji reikšmė yra pasirinkimo sandorio kaina jo pasirašymo metu ir randama pagal formulę (6), kai N nelyginis, arba formulę (7), kai N lyginis.

$$C_{nel}=C_T\mathrm{e}^{-\delta t}=\mathrm{e}^{-\delta t}\sum_{i=0}^{N-2}\Big(\big(Su^{1+2i}-X\big)p_{2+4i}+\big(Sd^{1+2i}-X\big)p_{3+4i}\Big), \tag{6}$$

$$C_{lyg}=\mathrm{e}^{-\delta t}\Bigg((S-X)\,p_1+\sum_{i=0}^{N-1}\Big(\big(Su^{4i}-X\big)p_{4i}+\big(Sd^{1+4i}-X\big)p_{1+4i}\Big)\Bigg). \tag{7}$$

3. Modelių jautrumas parametrams

Tyrimo metu skaitiniais modeliais gautos kainos yra lyginamos su kaina, gauta pagal Black–Scholes formulę [2].

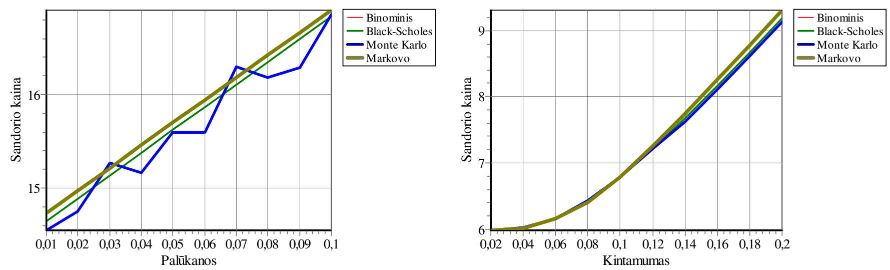
Įkainosime pasirinkimo pirkti sandorį IBM kompanijos akcijai. Iš istorinių 6 mėn. duomenų (nuo 2008 lapkričio iki 2009 gegužės) buvo įvertinti tokie parametrai: metinis grąžų vidurkis $\mu=0,00085$ ir kintamumas $\sigma=0,42778$.

Tarkime, kad nerizikingoji paprastoji palūkanų norma per metus yra 4%. Paskutinioji kaina imtyje 104,05 \$ yra esamoji akcijos kaina. Pasirinkime įvykdymo kainą, lygią 100 \$, o sandorio trukmę – 6 mėn. Sandorio laikotarpį dalijame į 10 periodų, sumodeliuokime 20000 realizacijų Monte Karlo metodui.

Atlikus modeliavimą nustatyta, kad sandorio kaina auga vis sparčiau didėjant akcijos esamajai kainai. Tyrimas taip pat parodė, kad įvykdymo kainai esant artimai dabartinei akcijos kainai, Monte Karlo metodas yra tikslesnis.

Sandorio kainos priklausomybė nuo akcijos kintamumo jam viršinant 0,1 pasidaro panaši į tiesinę ir pradeda reikšmingiau skirtis tarp metodų. Markovo modelis kartu su binominiu modeliu apskaičiuoja didesnes kainas negu kiti metodai prie didesnio kintamumo. Pastebėta, kad Monte Karlo metodas tikslesnis prie mažesnių σ.

Nerizikingųjų palūkanų norma skaičiavimų rezultatams įtakos neturi, tačiau iš 2 a) pav. matome, kad Monte Karlo metodas duoda atsitiktinius rezultatus dėl pseudo atsitiktinių dydžių generavimo.



a) b)

2 pav. Sandorio kainos priklausomybė nuo jo parametrų.

Modeliavimas parodė, kad Monte Karlo metodas didesnes paklaidas duoda prie ilgesnės sandorio trukmės. Tačiau sandorio trukmė nėra tiesioginis faktorius, dėl kurio didėja paklaidos, tai su laiku didėjančios dispersijos, kuri modelio formulėje dar dauginama iš atsitiktinio dydžio, įtaka.

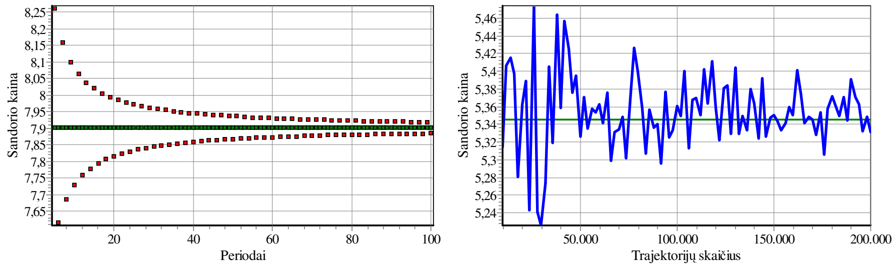
Visais atvejais binominis ir Markovo modeliai idealiai sutapo.

4. Modelių konvergavimas

Nagrinėkime tą patį pasirinkimo pirkti sandorį. Tarkime, kad metinė paprastųjų nerizikingųjų palūkanų norma yra 8%, o sandorio trukmė yra 2 mėnesiai. Įsitikinome, kad binominis ir Markovo modeliai duoda kainų įverčius su dideliu bei vienodu tikslumu. Todėl toliau tyrinėjamas binominio modelio konvergavimas ir pastebėjimai visiškai tinka ir Markovo modeliui.

3 a) paveiksle matome binominio modelio konvergavimą į Black–Scholes formulę, kai sandorio įvykdymo kaina yra 104 \$, o gardelės periodų skaičius kinta nuo 5 iki 100. Visos kainos, kurios didesnės už Black–Scholes, apskaičiuotos formuojant gardeles, turinčias nelyginį periodų skaičių, mažesnės – lyginį. Toks kainos konvergavimo pobūdis būdingas ir pasirinkimo parduoti sandoriui su tais pačiais parametrais.

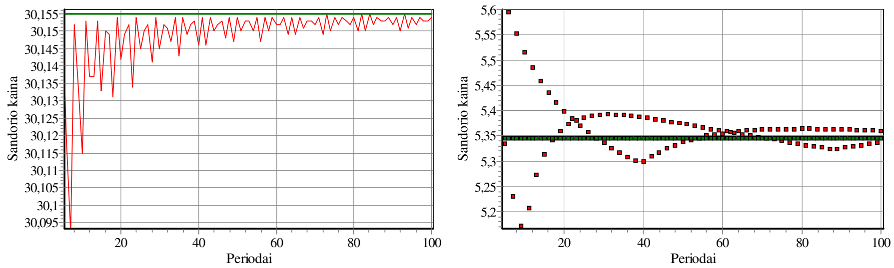
Nagrinėkime patrauklų pasirinkimo pirkti sandorį, t.y. kai jį apsimoka įvykdyti iš karto po jo išleidimo. Sakykime, kad įvykdymo kaina yra $X = 75\$$. Šiuo atveju, didėjant gardelės periodų skaičiui, kaina konverguoja iš apačios prie tikslios (teorinės)



a) Markovo, binominis b) Monte Karlo

3 pav. Modelių konvergavimas.

reikšmės su kintančia ir mažėjančia amplitude (4 a) pav.). Taip konverguoja ir nepatrauklus sandoris.



a) Daugiau (ne)patrauklus sandoris b) Mažiau (ne)patrauklus sandoris

4 pav. Binominio modelio konvergavimas.

Tarkime, kad $X = 110\$$. 4 b) paveiksle matome binominio modelio konvergavimą priklausomai nuo gardelės periodų skaičiaus. Iš visų trijų atvejų matome, kad papildomų gardelės žingsnių pridėjimas lėtai didina rezultatų tikslumą. Markovo modeliui skaičiavimų laikas, kai gardelės periodų skaičius nesiekia 25, nesiskiria nuo binominio modelio, bet toliau auga eksponentiškai.

Atlikus Monte Karlo metodo tyrimą, gauta 3 b) paveiksle pavaizduota pasirinkimo pirkti sandorio kainos priklausomybė nuo sugeneruotų trajektorijų skaičiaus. Didesnis generuojamų akcijos kainų trajektorijų skaičius lemia tikslesnę kainą, tačiau šiame pavyzdyje matome, kad tikslumas gerėja pakankamai negreitai. Norint greitesnio ir pastovesnio konvergavimo reikėtų taikyti įvairius kvazi Monte Karlo metodus.

Monte Karlo metodo tyrimas parodė, kad sandorio laikotarpio dalinimas į periodus neturi įtakos jo kainos tikslumui, o modeliavimo trukmė nuo sandorio laikotarpio padalijimo į periodus bei realizacijų skaičiaus priklauso tiesiškai.

5. Išvados

1. Markovo modelis pasirinkimo sandorių kainą skaičiuoja taip pat tiksliai, kaip ir binominis modelis. Suskaičiuotos kainos skirtumai pasireiškia tik 16–17 skaitmenyje po kablelio.
2. Iš atliktos modelių analizės IBM akcijų duomenims nustatyta, kad esant dideliam sandorio laikotarpio periodų skaičiui (nagrinėtu atveju didesniam už 25) Markovo modelio skaičiavimai užtrunka daug ilgiau.
3. Monte Karlo metodo realizacija parodė, kad apskaičiuoti sandorio kainą 0,1 cento tikslumu reikėjo 2000000 realizacijų ir 9,5 s programos skaičiavimų laiko. Tai įrodo, kad grynasis Monte Karlo modeliavimas reikalauja sugeneruoti daug trajektorijų užsibrėžtam tikslumui pasiekti.
4. Siekiant tikslesnio rezultato, kai bazinio finansinio aktyvo kintamumas yra didelis, reikia imti daugiau binominės gardelės periodų ir daugiau Monte Karlo realizacijų.

Literatūra

1. H. Breskman, R. Chiu, W. Creighton, P. Larson, V. Lim, M. McMakin, D. Shah. *A Markovian Options Pricing Model*. March 2009.
2. B. Fischer, S. Myron. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–659, 1973.
3. J.C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*, 6ed. Prentice Hall, 2006.
4. P. Wilmott. *Introduces Quantitative Finance*, 2ed. John Willey& Sons Ltd., 2007.

SUMMARY

M. Landauskas, E. Valakevičius. Analysis of pricing models for options

The program developed was effective in time of calculation and let us state, that binomial and Markovian models give similar results, but Markovian model is much slower when lattice has more than 25 periods. The crude Monte Carlo Model requires millions of paths to be generated in order to get high accuracy.

Keywords: option, binomial model, Monte Carlo method, Markov chains.